УДК 517.929

Б. Г. Гребенщиков

О СУЩЕСТВОВАНИИ АСИМПТОТИЧЕСКИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ*

Рассматривается следующая линейная неоднородная система с постоянным запаздыванием:

$$\begin{gathered} dx(t)/dt = A_1x(t) + A_2x(t-\tau) + B_1y(t) + B_2y(t-\tau) + \overline{f}_1(t), \\ dy(t)/dt = e^t(A_3x(t) + A_4x(t-\tau) + B_3y(t) + B_4y(t-\tau) + \overline{f}_2(t)), \\ t \ge t_0 > 0. \end{gathered} \tag{1}$$

Здесь A_r, B_r $(r = 1, \ldots, 4)$ – постоянные матрицы размерности $m \times m$; $x(t), y(t)$ – m-мерные вектор-функции времени t, m-мерные вектор-функции $\overline{f}_j(t)$ $(j = 1, 2)$ являются непрерывно дифференцируемыми периодическими периода $\tau = \mathrm{const}$.

Решение системы (1) определено при $t \le t_0$ (полагаем, что t_0 достаточно большое положительное число) начальной вектор-функцией

$$\phi^{(*)}(\eta) = \{\phi_1(\eta), \phi_2(\eta)\}: \ x(\eta) = \phi_1(\eta), \ y(\eta) = \phi_2(\eta), \ t_0 - \tau \le \eta \le t_0$$

(значок «$(*)$» означает транспонирование).

Перейдем от системы (1), конечной системы дифференциальных уравнений с запаздыванием на бесконечном промежутке времени, к счетной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, заданной на конечном промежутке времени $[0, \tau]$, полагая

$$\begin{gathered} x_{n+1}(t) = x(t_0 + n\tau + t), \ \ y_{n+1}(t) = y(t_0 + n\tau + t), \\ f_r(t) = \overline{f}_r(t_0 + t), \ \ t \in [0, \tau] \ \ (r = 1, 2). \end{gathered}$$

Получаем совокупность двух подсистем m-го порядка:

$$dx_{n+1}(t)/dt = A_1x_{n+1}(t) + A_2x_n(t) + B_1y_{n+1}(t) + B_2y_n(t) + f_1(t), \tag{2}$$

$$\varepsilon_n dy_{n+1}(t)/dt = e^t(A_3x_{n+1}(t) + A_4x_n(t) + B_3y_{n+1}(t) + B_4y_n(t) + f_2(t)), \tag{3}$$

$$0 \le t \le \tau, \ \ \varepsilon_n = e^{-(t_0+n\tau)},$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования РФ, грант №Е00-1.0-88.

для которой справедливы граничные условия

$$x_{n+1}(0) = x_n(\tau), \;\; y_{n+1}(0) = y_n(\tau).$$

Таким образом, нахождение решения исходной системы (1) сведено к последовательному интегрированию дифференциально-разностной [1] неоднородной системы в линейном пространстве непрерывных вектор-функций, заданных на отрезке $[0,\tau]$. Отметим некоторые свойства подсистемы (3). Ввиду того что $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$, подсистема (3) является сингулярно возмущенной [2, 3], следовательно, совокупность решений системы (2), (3) можно рассматривать как систему, содержащую медленные $(x_n(t))$ и быстрые $(y_n(t))$ переменные.

Полагаем, что корни λ уравнения

$$|A_1 + A_2 e^{-\lambda\tau} - \lambda E| = 0 \tag{4}$$

удовлетворяют условию

$$Re(\lambda) < -\beta_1, \;\; \beta_1 = \text{const}, \;\; \beta_1 > 0. \tag{5}$$

Наряду с этим предполагаем, что для любого $j = 0, \pm1, \pm2, \dots$ существует матрица

$$(A_1 + A_2 + ijlE)^{-1}, \;\; l = \frac{2\pi}{\tau}, \;\; i = \sqrt{-1} \tag{6}$$

(E – единичная матрица m-го порядка). Далее, считаем, что все собственные значения $\overline{\lambda}$ матрицы B_3 имеют отрицательные вещественные части, т. е. справедливо неравенство

$$Re(\overline{\lambda}) < -\beta_2, \;\; \beta_2 = \text{const}, \;\; \beta_2 > 0. \tag{7}$$

Наконец, полагаем, что корни ν уравнения

$$\left| B_3 + B_4 e^{-\nu\tau} - \left(A_3 + A_4 e^{-\nu\tau}\right)\left(A_1 + A_2 e^{-\nu\tau} - \nu E\right)^{-1}\left(B_1 + B_2 e^{-\nu\tau}\right) \right| = 0 \tag{8}$$

имеют отрицательную вещественную часть, т. е. справедлива оценка

$$Re(\nu) < -\beta_3, \;\; \beta_3 = \text{const}, \;\; \beta_3 > 0. \tag{9}$$

Определим теперь норму вектора w как $\|w\| = \sum_j |w_j|$, где w_j – компоненты вектора w. Норму матрицы определим в соответствии с нормой вектора [2]. Если определить норму вектор-функции $z(t)$ $(t \in [0,\tau])$ как

$$\|z(t)\|_\tau = \max_{0 \le t \le \tau} \|z(t)\|,$$

то при такой нормировке линейное пространство непрерывных вектор-функций, определенных на отрезке $[0,\tau]$, будет пространством Банаха [2]. Обозначим его через $C_{2m}[0,\tau]$.

Теорема. *При выполнении неравенств* (5), (7), (9) *и условия* (6) *система* (1) *имеет асимптотически периодическое* [3] (*периода* τ) *решение.*

Доказательство. Рассмотрим вырожденную систему

$$dx_{n+1}(t)/dt = A_1x_{n+1}(t) + A_2x_n(t) + B_1y_{n+1}(t) + B_2y_n(t) + f_1(t), \qquad (10)$$

$$0 = A_3x_{n+1}(t) + A_4x_n(t) + B_3y_{n+1}(t) + B_4y_n(t) + f_2(t). \qquad (11)$$

Учитывая соотношения (2) и (3), будем искать ее периодическое (по n) решение $x_{n+1}(t) = x_n(t) = \overline{x}(t)$, $y_{n+1}(t) = y_n(t) = \overline{y}(t)$ методом неопределенных коэффициентов. Полагаем

$$\overline{x}(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \alpha_j^0 e^{ijlt}, \ \ \overline{y}(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \gamma_j^0 e^{ijlt}, \ \ l = \frac{2\pi}{\tau}, \ \ i = \sqrt{-1}. \qquad (12)$$

Разложим вектор-функции $f_1(t), f_2(t)$ в комплекснозначные ряды Фурье [4]

$$f_r(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta_{j,0}^r e^{ijlt}, \ r = 1, 2. \qquad (13)$$

Ряды (13) сходятся абсолютно, т. е.

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \|\delta_{j,0}^r\| < M_r < \infty, \ \ r = 1, 2. \qquad (14)$$

Подставляя представление (12) в систему (10), (11) (с учетом соотношения (13)) и приравнивая коэффициенты при одинаковых величинах e^{ijlt}, получаем следующие уравнения для определения коэффициентов α_j^0, γ_j^0:

$$\alpha_j^0 ijl = (A_1 + A_2)\alpha_j^0 + (B_1 + B_2)\gamma_j^0 + \delta_{j,0}^1, \qquad (15)$$

$$(A_3 + A_4)\alpha_j^0 + (B_3 + B_4)\gamma_j^0 + \delta_{j,0}^2 = 0. \qquad (16)$$

Разрешим теперь систему (15) относительно α_j^0:

$$\alpha_j^0 = -(A_1 + A_2 - ijlE)^{-1} \left[(B_1 + B_2)\gamma_j^0 + \delta_{j,0}^1\right]. \qquad (17)$$

Подставив представление (17) в (16), получаем соотношение

$$-(A_3 + A_4)\left(A_1 + A_2 - ijlE\right)^{-1} \left[(B_1 + B_2)\gamma_j^0 + \delta_{j,0}^1\right] + (B_3 + B_4)\gamma_j^0 + \delta_{j,0}^2 = 0.$$

Приведя подобные члены в последнем соотношении, получаем окончательно матричное уравнение

$$\Big[B_3 + B_4 - (A_3 + A_4)\left(A_1 + A_2 - ijlE\right)^{-1}\left(B_1 + B_2\right)\Big]\gamma_j^0 =$$

$$= (A_3 + A_4)\,(A_1 + A_2 - ijlE)^{-1}\,\delta^1_{j,0} - \delta^2_{j,0}. \tag{18}$$

Разрешимость же матричного уравнения (18) следует из того факта, что все корни уравнения (8) имеют отрицательные вещественные части, следовательно, матрица

$$\Big[B_3 + B_4 - (A_3 + A_4)\,(A_1 + A_2 - ijlE)^{-1}\,(B_1 + B_2)\Big]^{-1}$$

существует. Определив из соотношения (18) величины γ^0_j, найдем и величины α^0_j. Докажем теперь абсолютную сходимость полученных нами рядов Фурье. Ввиду того что ряды (14) сходятся абсолютно, а также ввиду предельного равенства

$$\lim_{j\to\infty}\,(A_1 + A_2 - ijlE)^{-1} = 0,$$

найдутся такие положительные постоянные M_3, M_4:

$$\sup_j \|(A_1 + A_2 - ijlE)^{-1}\| < M_3,$$

$$\sup_j \|\,\Big[B_3 + B_4 - (A_3 + A_4)\,(A_1 + A_2 - ijlE)^{-1}\,(B_1 + B_2)\Big]^{-1}\,\| < M_4, \tag{19}$$

что для коэффициентов α^0_j, γ^0_j будут справедливы оценки

$$\|\gamma^0_j\| \le M_3(M_4\|A_3 + A_4\|\|\delta^1_{j,0}\| + \|\delta^2_{j,0}\|),$$

$$\|\alpha^0_j\| \le (M_3)^2\|B_3 + B_4\|(M_4\|A_3 + A_4\|\|\delta^1_{j,0}\| + \|\delta^2_{j,0}\|) + M_3\|\delta^1_{j,0}\|. \tag{20}$$

Но тогда ряды

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}\alpha^0_j e^{ijlt},\quad \sum_{j=-\infty}^{\infty}\gamma^0_j e^{ijlt} \tag{21}$$

сходятся абсолютно, следовательно, периодическое решение вырожденной системы (10), (11) может быть найдено с любой степенью точности. Покажем теперь, что любое решение системы (2), (3) стремится к данному решению при $n \to \infty$. Полагая $x_{n+1}(t) = \overline{x}(t) + u_{n+1}(t)$, $y_{n+1}(t) = \overline{y}(t) + v_{n+1}(t)$, подставляя данные выражения в систему (2), (3) и учитывая соотношения (10), (11), получаем следующие соотношения:

$$du_{n+1}(t)/dt = A_1u_{n+1}(t) + A_2u_n(t) + B_1v_{n+1}(t) + B_2v_n(t), \tag{22}$$

$$\varepsilon_n dv_{n+1}(t)/dt + \varepsilon_n d\overline{y}(t)/dt = e^t(A_3u_{n+1}(t) + A_4u_n(t) + B_3v_{n+1}(t) + B_4v_n(t)). \tag{23}$$

Данная система является неоднородной (именно, неоднородностью в ней является член $\overline{F}_n(t) = -\varepsilon_n d\overline{y}(t)/dt$), причем $\overline{F}_n(t) \to 0$ при $n \to \infty$ (ввиду того что ряды (12) сходятся абсолютно, достаточно в качестве периодического решения взять в соотношениях (22), (23) конечные суммы данных рядов (вычисленные с любой степенью точности)), т. е.

$$\overline{x}(t) \approx Q^1_{n_0} = \sum_{j=-n_0}^{n_0} \alpha^0_j e^{ijlt}, \;\; \overline{y}(t) \approx Q^2_{n_0} = \sum_{j=-n_0}^{n_0} \gamma^0_j.$$

Методами, аналогичными применяемым автором в работе [5], можно доказать, что при выполнении неравенств (5), (7), (9) соответствующая однородная система

$$du_{n+1}(t)/dt = A_1 u_{n+1}(t) + A_2 u_n(t) + B_1 v_{n+1}(t) + B_2 v_n(t), \tag{24}$$

$$\varepsilon_n dv_{n+1}(t)/dt = e^t (A_3 u_{n+1}(t) + A_4 u_n(t) + B_3 v_{n+1}(t) + B_4 v_n(t)) \tag{25}$$

является экспоненциально устойчивой, т. е. справедлива оценка

$$\begin{gathered}\|w_{n+1}(t)\|_\tau \le Lq^n[\|u_0\|_\tau + \|v_0\|_\tau], \;\; w^{(*)}_{n+1}(t) = \{u_{n+1}(t), v_{n+1}(t)\},\\ L = \text{const}, \;\; L \ge 1, \;\; q = \text{const}, \;\; 0 < q < 1.\end{gathered} \tag{26}$$

Будем рассматривать решение дифференциально-разностной системы (22), (23) в банаховом пространстве непрерывных функций $C_{[0,\tau]}$. Рассмотрим линейный оператор $T_n = \left(T_n^{(1)}, T_n^{(2)}\right)$, компоненты которого действуют соответственно на последовательности $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ следущим образом:

$$\begin{gathered}T_n^{(1)} u_n = U(t) u_n(\tau) + \int_0^t U(t-s)(A_2 u_n(s) + B_1 v_{n+1}(s) + B_2 v_n(s))ds,\\ T_n^{(2)} v_n = e^{B_3(\varepsilon_n)^{-1}(e^t-1)} v_n(\tau) + \int_0^t e^{B_2(\varepsilon_n)^{-1}(e^t-e^s)} e^s (\varepsilon_n)^{-1} (B_4 v_n(s) + \\ + A_3 u_{n+1}(s) + A_4 u_n(s))ds.\end{gathered} \tag{27}$$

Здесь $U(t-s)$ – фундаментальная матрица решений однородной системы

$$d\overline{u}_{n+1}/dt = A_1 \overline{u}_{n+1}(t) + A_2 \overline{u}_n(t), \;\; 0 \le t \le \tau, \;\; \overline{u}_{n+1}(0) = \overline{u}_n(\tau). \tag{28}$$

Очевидно, решение системы (22), (23) можно представить в операторном виде (а именно, решение, записанное в виде равенства (27), есть не что иное, как решение системы (22), (23), записанное в интегральной форме). Данный оператор T_n является вполне непрерывным [2]. Покажем, что при достаточно малых ε_n он равномерно ограничен. Рассмотрим следующий интеграл:

$$I_n = \int_0^t e^{B_3(\varepsilon_n)^{-1}(e^t-e^s)} e^s (\varepsilon_n)^{-1} A_3 u_{n+1}(s) ds.$$

Интегрируя его по частям и учитывая при этом равенство (2) и граничные условия, получаем соотношение

$$I_n = B_3^{-1} e^{B_3(\varepsilon_n)^{-1}(e^t-1)} A_3 u_{n+1}(0) - B_3^{-1} A_3 u_{n+1}(t) + \tag{29}$$
$$+ \int_0^t B_3^{-1} e^{B_3(\varepsilon)^{-1}(e^t-e^s)} A_3 \left[A_1 u_{n+1}(s) + A_2 u_n(s) + B_1 v_{n+1}(s) + B_2 v_n(s)\right] ds.$$

Ввиду оценки (7) имеем следующее неравенство:

$$\|e^{B_3(\varepsilon_n)^{-1}(e^t-e^s)}\| \le M_5 e^{-\beta_2(\varepsilon_n)^{-1}(e^t-e^s)},\ \ M_5 = \mathrm{const},\ \ M_5 > 1. \tag{30}$$

Но тогда из (29), учитывая оценку (30), получаем неравенство

$$\|I_n\| \le \|B_3^{-1}\|\|A_3\|[\|u_{n+1}(t)\| + M_5 e^{-\beta_2(\varepsilon_n)^{-1}(e^t-1)}\|u_n(\tau)\| +$$
$$+ \int_0^t M_5 e^{-\beta_2(\varepsilon_n)^{-1}(e^t-e^s)}\|B_3^{-1}\|\|A_3\|\Big[\|A_1\|\|u_{n+1}(s)\| +$$
$$+ \|A_2\|\|u_n(s)\| + \|B_1\|\|v_{n+1}(s)\| + \|B_2\|\|v_n(s)\|\Big] ds.$$

Рассмотрим интеграл в правой части последнего неравенства. Так как ε_n предполагается достаточно малым, ввиду неравенства (30) получаем оценку

$$\int_0^t M_5 e^{-\beta_2(\varepsilon_n)^{-1}(e^t-e^s)}\|B_3^{-1}\|\|A_3\|\Big[\|A_1\|\|u_{n+1}(s)\| + \|A_2\|\|u_n(s)\| +$$
$$+ \|B_1\|\|v_{n+1}(s)\| + \|B_2\|\|v_n(s)\|\Big] ds = O(\varepsilon_n)\Big[\|u_{n+1}(t)\|_\tau +$$
$$+ \|u_n(t)\|_\tau + \|v_{n+1}(t)\|_\tau + \|v_n(t)\|_\tau\Big].$$

Если теперь с помощью неравенства (30) записать оценки для свободного члена и остальных интегралов в правой части соотношения (29), получим в первом приближении (т. е. при $\varepsilon_n \equiv 0$) из соотношения (23) для $\|v_{n+1}^1\|$ следующее неравенство:

$$\|v_{n+1}^1(t)\| \le m_1\|u_{n+1}^1(t)\| + m_2\|u_n^1(t)\|_\tau + n_1\|v_n^1(t)\|_\tau,$$
$$m_1 = \|B_3^{-1}\|\|A_3\|,\ \ m_2 = M_5[\|B_3^{-1}\|\|A_3\| + \|A_4\|],\ \ n_1 = M_5(1 + \|B_4\|) \tag{31}$$

(здесь u_j^1, v_j^1 – решение системы (22), (23) в первом приближении).

Рассмотрим теперь систему (31). Ввиду оценки (5) справедливо следующее неравенство:

$$\|U(t-s)\| \le M_6 e^{-\beta_1(t-s)},\ \ M_6 = \mathrm{const},\ \ M_6 > 1,\ \ 0 \le s \le t \le \tau. \tag{32}$$

Учитывая оценку (32), из соотношения (22) получаем следующее неравенство для первого приближения $u^1_{n+1}(t)$:

$$\|u^1_{n+1}(t)\| \le M_6 e^{-\beta_1 t}\Big[\|u_n(\tau)\| +$$
$$+ \int_0^\tau e^{\beta_1 s}\left[\|A_2\|\|u^1_n(s)\| + \|B_1\|\|v^1_{n+1}(s)\| + \|B_2\|\|v^1_n(s)\|\right]ds\Big].$$

Далее, ввиду оценки (31) получаем из последнего неравенства следующую цепь соотношений:

$$\|u^1_{n+1}(t)\| \le M_6 e^{-\beta_1 t}\Big[\|u^1_n(\tau)\| + \int_0^\tau e^{\beta_1 s}\left[\|A_2\|\|u^1_n(s)\| + \|B_1\|(m_1\|u^1_{n+1}(s)\| +\right.$$
$$\left. + m_2\|u^1_n(t)\|_\tau + n_1\|v^1_n(t)\|_\tau) + \|B_2\|\|v^1_n(s)\|\right]ds\Big] \le$$
$$\le M_6 e^{-\beta_1 t}\left[\int_0^t e^{\beta_1 s} m_1 \|B_1\|\|u^1_{n+1}(s)\|ds + f^1_n(t)\right],$$
$$f^1_n(t) = \|u^1_n(\tau)\| +$$
$$+ \int_0^t e^{\beta_1 s}\left[(\|A_2\| + \|B_1\|m_2)\|u^1_n(t)\|_\tau + (\|B_1\|n_1 + \|B_2\|)\|v^1_n(t)\|_\tau\right]ds. \qquad (33)$$

Отметим теперь некоторые свойства функции $f^1_n(t)$. Она не зависит от переменных $u^1_{n+1}(t), v^1_{n+1}(t)$, положительная и является монотонно не убывающей (по t) [1]. Обозначив $\omega_{n+1}(t) = \|v^1_{n+1}(t)\|e^{\beta_1 t}$, получаем из соотношения (31) следующее неравенство:

$$\omega_{n+1}(t) \le M_6 \int_0^t \|B_1\| m_1 \omega_{n+1}(s)ds + M_6 f^1_n(t). \qquad (34)$$

Применяя теперь к соотношению (34) лемму Беллмана–Гронуолла [1], получаем следующую оценку:

$$\omega_{n+1}(t) \le M_6 f^1_n(t) e^{\int_0^t \beta_4 ds} = M_6 f^1_n(t) e^{\beta_4 t}, \;\; \beta_4 = m_1 M_6 \|B_1\|. \qquad (35)$$

Возвращаясь к переменной $u^1_{n+1}(t)$, получаем из соотношений (22), (24) более грубую оценку:

$$\|u^1_{n+1}\|_\tau \le \left[a_1\|u^1_n(t)\|_\tau + a_2\|v_n(t)\|_\tau\right] e^{\beta_4 \tau},$$
$$a_1 = M_6\left[1 + \frac{1}{\beta_1}(e^{\beta_1\tau} - 1)(\|A_2\| + \|B_1\|m_2)\right],$$
$$a_2 = \frac{M_6}{\beta_1}(e^{\beta_1\tau} - 1)(\|B_1\|n_1 + \|B_2\|). \qquad (36)$$

Далее, для $\|v^1_{n+1}(t)\|$ из соотношений (31), (36) получаем оценку

$$\|v^1_{n+1}(t)\|_\tau \le \left(m_1 a_1 e^{\beta_4 \tau} + m_2\right) \|u^1_n(t)\|_\tau + \left(m_1 a_2 e^{\beta_4 \tau} + n_1\right) \|v^1_n(t)\|_\tau. \tag{37}$$

Окончательно, первое приближение

$$w^1_{n+1} = \left\{ \begin{array}{c} \|u^1_{n+1}(t)\|_\tau \\ \|v^1_{n+1}(t)\|_\tau \end{array} \right\}$$

удовлетворяет следующему матричному неравенству:

$$w^1_{n+1} \le D w^1_n, \tag{38}$$

где элементы $\{d_{jk}\}$ матрицы D вычисляются следующим образом:

$$d_{11} = a_1 e^{\beta_4 \tau},\ \ d_{12} = a_2 e^{\beta_4 \tau},\ \ d_{21} = m_1 a_1 e^{\beta_4 \tau} + m_2,\ \ d_{22} = m_1 a_2 e^{\beta_4 \tau} + n_1.$$

Ввиду того что $\|D^n w_0\| \le \|D^n\|\|w_0\| \le L_1 (q_*)^n \|w_0\|$, где $L_1 = \mathrm{const}$; $L_1 \ge 1$; $q_* = \max|\rho_j| + \varepsilon$ (ρ_1 и ρ_2 – собственные числа матрицы D), решение матричного неравенства (38) удовлетворяет следующей оценке:

$$\begin{aligned} &\|u^1_{n+1}(t)\|_\tau \le L_1 (q_*)^n \{\|x_0(t)\|_\tau + \|y_0(t)\|_\tau\}, \\ &\|v^1_{n+1}(t)\|_\tau \le L_1 (q_*)^n \{\|x_0(t)\|_\tau + \|y_0(t)\|_\tau\}. \end{aligned} \tag{39}$$

Будем теперь искать схожую асимптотическую оценку для однородных систем (24), (25) методом последовательных приближений, полагая по определению [1]

$$\begin{aligned} u^k_n(t) = u^1_n(t),\ \ v^k_n(t) = v^1_n(t) + \int_0^t B_3^{-1} e^{B_3(\varepsilon_n)^{-1}(e^t - e^s)} A_3 \big[A_1 u^{k-1}_n(s) + \\ + A_2 u^{k-1}_{n-1}(s) + B_1 v^{k-1}_n(s) + B_2 v^{k-1}_{n-1}(s)] ds, \end{aligned} \tag{40}$$

(при этом мы учли, что возмущающие члены появляются только во второй подсистеме, ввиду того что исходная подсистема (25) является сингулярно возмущенной).

Обозначив $\Delta^k_n = v^k_n - v^{k-1}_n$, из соотношения (49) получаем следующее разностное неравенство:

$$\|\Delta^k_n\| \le \varepsilon_n K_1 \|\Delta^{k-1}_n\| + \varepsilon_n K_2 \|\Delta^{k-1}_{n-1}\|,$$
$$K_1 = M_5(\beta_2)^{-1} \|B_3^{-1}\| \|A_3\| \|B_1\|,\ \ K_2 = M_5(\beta_2)^{-1} \|B_3^{-1}\| \|A_3\| \|B_2\|.$$

Пусть $\overline{\varepsilon}_n = \max\{\varepsilon_n K_1, \varepsilon_n K_2\}$. Тогда из последнего соотношения получаем более грубое неравенство

$$\|\Delta^k_n\| \le \overline{\varepsilon}_n [\|\Delta^{k-1}_n\| + \|\Delta^{k-1}_{n-1}\|]. \tag{41}$$

Учитывая, что $\Delta_n^1 = y_n^1$, из неравенства (41) последовательно получаем следующие соотношения:

$$\Delta_n^2 \le \overline{\varepsilon}_n[\|y_n^1\| + \|y_{n-1}^1\|],$$
$$\Delta_n^3 \le \overline{\varepsilon}_n^2\left[\|y_n^1\| + 2\|y_{n-1}^1\| + \|y_{n-2}^1\|\right],$$
$$\Delta_n^4 \le \overline{\varepsilon}_n^3\left[\|y_n^1\| + 3\|y_{n-1}^1\| + 3\|y_{n-2}^1\| + \|y_{n-3}^1\|\right],$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\Delta_n^{k+1} \le \overline{\varepsilon}_n^k\left[\|y_n^1\| + k\|y_{n-1}^1\| + \frac{k(k-1)}{2}\|y_{n-2}^1\| + \right.$$
$$\left. + \frac{k(k-1)(k-2)}{2*3}\|y_{n-3}^1\| + \dots + \|y_{n-k}^1\|\right] \tag{42}$$

(заметим, что $y_{n-j} = 0$ при $j > n$). Из данных соотношений, а также из оценки (39) следует, что $\|\Delta_n^k\| \to 0$ (при $k \to \infty$ и фиксированном n), т. е. процесс последовательных приближений сходится при $\overline{\varepsilon}_n < 1$.

Учитывая это и сходимость ряда $\sum \varepsilon_j$, для второго приближения $v_{n+1}^2(t)$ получаем оценку

$$\|v_{n+1}^2(t)\|_\tau \le L_1 q_*^n(1 + L_2\varepsilon_0 + L_3\varepsilon_0)(\|x_0(t)\|_\tau + \|y_0(t)\|_\tau),$$
$$L_2 = \left(M_5\|B_3^{-1}\|\|A_3\|\right)(\beta_2(1-\mu))^{-1}\left[\|A_1\|q_* + \|A_2\|\right],\ \ \mu = e^{-\tau},\ \ 0 < \mu < 1,$$
$$L_3 = \left(M_5\|B_3^{-1}\|\|A_3\|\right)(\beta_2(1-\mu))^{-1}\left[\|B_1\|q_* + \|B_2\|\right].$$

Для третьего приближения, в свою очередь, получаем неравенство

$$\|v_{n+1}^3(t)\|_\tau \le L_1 q_*^n[1 + (L_2 + L_3)\varepsilon_n + (\varepsilon_n)^2 L_3(L_2 + L_3)](\|x_0(t)\|_\tau + \|y_0(t)\|_\tau) <$$
$$< L_1 q_*^n(1 + a + a^2)(\|x_0(t)\|_\tau + \|y_0(t)\|_\tau),\ \ a = \varepsilon_0(L_2 + L_3),$$

и т. д. Ввиду того что момент времени $t_0 > 0$ достаточно большой, величина $\varepsilon_0 = e^{-t_0}$ мала, следовательно, можно считать, что $a < 1$. Тогда для k-го приближения получаем систему неравенств

$$\|u_{n+1}^k(t)\| \le L_1 q_*^n(\|x_0(t)\|_\tau + \|y_0(t)\|_\tau),$$
$$\|v_{n+1}^k(t)\| \le L_1 q_*^n\left[1 + a + a^2 + \dots + a^{k-1}\right](\|x_0(t)\|_\tau + \|y_0(t)\|_\tau) \le$$
$$\le \frac{L_1}{1-a} q_*^n(\|x_0(t)\|_\tau + \|y_0(t)\|_\tau). \tag{43}$$

Полагая $M = L_1 q_*(1 + \frac{1}{1-a})$, получаем оценку

$$\|T_n\| \le M, \tag{44}$$

из которой следует, что оператор T_n равномерно ограничен. Данная оценка является весьма грубой и не учитывает асимптотических свойств системы (24), (25). Тем не менее благодаря ей для изучения асимптотического поведения решения можно применить преобразование Лапласа [1]. Теперь методами, аналогичными примененным в работе [5], можно получить оценку (26), откуда следует неравенство

$$\| \prod_{j=0}^{n} T_j w_0(s) \| \leq L q^n [\|u_0\|_\tau + \|v_0\|_\tau].$$

Введем теперь следующий интегральный оператор:

$$R_n y(s) = \int_0^t e^{B_3(\varepsilon_n)^{-1}(e^t - e^s)} y(s) ds. \tag{45}$$

Данный оператор является вполне непрерывным, причем, ввиду оценки (30), справедливо неравенство

$$\|R_n\| \leq M_5 \beta_2^{-1} \varepsilon_n. \tag{46}$$

Поведение решения неоднородной системы (23),(24) будем исследовать по шагам, исходя из его представления в интегральной форме и вида операторов T_n и R_n. На первом шаге имеем

$$w_1(t) = T_0 w_0(s) - R_0 d\overline{y}(s)/ds.$$

На следующем шаге имеем соотношения

$$w_2(t) = T_1 w_1(s) - R_1 d\overline{y}(s)/ds = T_1 T_0 w_0(s) - T_1 R_0 d\overline{y}(s)/ds - R_1 d\overline{y}(s)/ds,$$

и т. д. Вообще, для $w_{n+1}(t)$ имеем соотношение

$$w_{n+1}(t) = T_n T_{n-1} \dots T_0 w_0(s) - T_n T_{n-1} \dots T_1 R_0 d\overline{y}(s)/ds - \\ - T_n T_{n-1} \dots T_2 R_1 d\overline{y}(s)/ds - \dots - R_n d\overline{y}(s)/ds.$$

Учитывая оценки (26), (46), получаем неравенство

$$\|w_{n+1}(t)\|_\tau \leq L \Big[q^n \|w\|_\tau + M_5 \|B_3\| \beta_2^{-1} \varepsilon_0 \left(q^{n-1}\mu + q^{n-2}\mu^2 + \dots + q\mu^{n-1} \right) \Big] \\ \|d\overline{y}(t)/dt\|_\tau + \varepsilon_0 M_5 \|B_3(\beta_2)^{-1} \mu^{n-1} \|d\overline{y}(t)/dt\|_\tau.$$

Пусть n_* – целая часть числа $\frac{n}{2}+1$. Из последнего соотношения получаем следующую цепь неравенств:

$$\|w_{n+1}(t)\|_\tau \le L\left[q^n\|w\|_\tau + M_5\|B_3\|\beta_2^{-1}\varepsilon_0\left(q^{n-1}\mu+q^{n-2}\mu^2+\ldots+q^{n_*}\mu^{n-n*}\right)\right]+$$
$$+LM_5\|B_3\|\beta_2^{-1}\varepsilon_0\left(q^{n_*-1}\mu^{n-n_*+1}+q^{n_*-2}\mu^{n-n_*+2}+\ldots+q\mu^{n-1}\right)\|d\overline{y}(t)/dt\|_\tau+$$
$$+\varepsilon_0 M_5\|B_3\|\beta_2^{-1}\mu^{n-1}\|d\overline{y}(t)/dt\|_\tau \le$$
$$\le Lq^n\|w_0\| + LM_5\|B_3\|\beta_2^{-1}\varepsilon_0\left[\frac{q^{n_*}}{1-\mu}+\frac{\mu^{n-n_*+1}}{1-q}\right]\|d\overline{y}(t)/dt\|_\tau+$$
$$+\varepsilon_0 M_5\|B_3\|\beta_2^{-1}\|d\overline{y}(t)/dt\|_\tau. \qquad (47)$$

Ввиду того что при $n\to\infty$ имеем $n_*\to\infty$ и $n-n_*+1\to\infty$, из оценки (47) получаем, что $\|w_{n+1}(t)\|_\tau\to 0$, т. е. решение системы (2), (3)

$$\begin{pmatrix}\overline{x}(t)\\ \overline{y}(t)\end{pmatrix}$$

является асимптотически периодическим. Теорема доказана.

Литература

1. Веллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967.
2. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
3. Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. М.: Мир, 1971.
4. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1966. Т. 3.
5. Гребенщиков Б. Г. Об устойчивости стационарных систем линейных дифференциальных уравнений нейтрального типа с запаздыванием, линейно зависящим от времени // Изв. вузов. Математика. 1991. №7(350). С. 69–71.

Статья поступила 04.10.2002 г.
Окончательный вариант 15.11.2002 г.